**Funciones Inversas**

Las funciones, han sido utilizadas en la matemática mucho antes de que nosotros estuviésemos aquí. El uso de las funciones es algo básico en las matemáticas, y por eso en esta investigación se analiza y estudia a las funciones. Pero en este especifico caso, nos fijaremos en las funciones inversas, que son también tan básicas como las funciones normales.

Objetivos

-Llegar a comprender el uso de las funciones inversas.

-Poder usar las funciones inversas en problemas de aplicación.

-Alcanzar a comprender su uso y su estudio.

FUNCIONES INVERSAS

Sabemos que una función es un conjunto de pares. Se nos puede ocurrir la idea de dar la vuelta a los pares y obtener así una nueva función. Hagámoslo con la función:

f = { (1, 2), (2, 4), (3, -1), (4, -2) }

y observemos qué pasa llamando g al conjunto resultante:

g = { (2, 1), (4, 2), (-1, 3), (-2, 4) }

Hemos obtenido una nueva función.

Sin embargo, esto no funciona siempre. Tomemos ahora como f el conjunto:

f = { (1, 2), (2, 4), (3, -1), (4, 2) }

y, entonces, g será:

g = { (2, 1), (4, 2), (-1, 3), (2, 4) }

que no es una función, pues g(2) no está determinado de forma única; es decir, g no cumple la condición de función. Existen dos pares, (2, 1) y (2, 4), que tienen la misma primera coordenada y la segunda coordenada es distinta.

¿Cuál es la diferencia entre estos dos ejemplos? Sencillamente, que en el segundo ejemplo f(1)=f(4)=2 y al darle la vuelta a los pares, g(2) no está determinado de forma única; con lo cual g no es una función. En el primer ejemplo, para valores diferentes de la "x" se obtienen valores diferentes de la "y". Las funciones que se comportan como la del primer ejemplo se llaman funciones inyectivas o uno a uno.

DEFINICIÓN: Una función f es inyectiva o uno a uno si f(a) es distinto de f(b) cuando a es distinto de b.

Cuando al invertir los pares de que consta una función se obtiene otra función, decimos que dicha función tiene inversa (también llamada recíproca). Por lo dicho anteriormente, sólo tienen inversas las funciones inyectivas.

DEFINICIÓN: Si f es una función inyectiva, llamamos función inversa de f y la representamos por f-1 al conjunto:

f-1 = { (a, b) / (b, a) Î f }

Es decir, f-1 = { (x, y) / x=f(y), si y es del dominio de f } = { (f(y), y) / si y es del dominio de f }

De la definición se sigue inmediatamente que el dominio de la función inversa f-1 es el rango de f y, recíprocamente, el rango de f-1 es el dominio de f. También es fácil observar que f-1(a)=b es equivalente a decir que f(b)=a. Utilizando la "x" y la "y" que tan acostumbrado estamos a usarlas cuando se habla de funciones: f-1(x)=y es equivalente a decir que f(y)=x. Otra forma de decir esto es: f(f-1(x))=x (donde x pertenece al rango de f), o bien, f-1(f(x))=x (donde x pertenece al dominio de f). Utilizando la composición de funciones y llamando I (función Identidad) a la función definida por I(x)=x, podemos escribir:

fof-1 = I y f-1of = I

salvo que el segundo miembro de estas dos igualdades tendrá un dominio más amplio que el primer miembro si el dominio de f o de f-1 no es todo R.

Por cierto, si una función tiene inversa, ¿a qué será igual (f-1)-1, o sea, la función inversa de la función inversa?

La idea de función inversa se ha utilizado muchas veces en los cursos anteriores a este nivel, sólo que no se le ha dado nombre. Recordar cómo se definía raíz cuadrada, cúbica...

Para determinar si una función tiene inversa tenemos que observar sus pares y ver si es inyectiva. Esto es muy fácil de hacer cuando la función viene dada por una lista de pares. Cuando la función viene definida por una propiedad, todo se complica y no siempre tendremos suficientes conocimientos matemáticos para determinar tal circunstancia (del mismo modo que nos pasaba cuando queríamos determinar si un determinado conjunto era o no función).

La representación gráfica de la función nos permitirá saber si la función tiene inversa o no, al menos en los casos más comunes. Basta observar que la definición de función inyectiva significa, gráficamente, que no hay dos puntos de la función situados sobre la misma recta horizontal. O dicho de otra forma, a partir de la representación gráfica de f, se construye la representación gráfica del conjunto de pares invertidos y se observa si este conjunto es función o no.

EJEMPLOS:

La función f definida por y=2x-3, es decir, f = { (x, y) / y=2x-3 } = { (x, 2x-3) } tiene inversa y su inversa será f-1 = { (y, x) / y=2x-3 } = { (x, y) / x=2y-3 } = { (2x-3, x) }

La función g definida por y=x2-2x-2, es decir, g = { (x, y) / y=x2-2x-2 } = { (x, x2-2x-2) } no tiene inversa. Por ejemplo, los pares (0, -2) y (2, -2) pertenecen a g y por lo tanto, g no es inyectiva.

La siguiente escena presenta ambos ejemplos. La función f o g aparecerá en azul y el conjunto de pares invertidos en rosa. Un control que se mueve a través de las funciones nos va mostrando un par de la función y otro punto nos presenta el correspondiente par invertido. Se podrá observar también en la escena una recta, la bisectriz del primer y tercer cuadrante (la recta de ecuación y=x). Observar que las gráficas de una función y de su conjunto de pares invertidos son simétricas respecto de dicha recta.

Problemas de Aplicación: